Informatik III - Tutorium IX & X (SR -107)

Tut Nr. 13 – Üb13, Klausurwiederholung

David Münch

Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Informatik
IAKS Beth

11. Februar 2009

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Organisatorisches

Email: muenchdavid@gmail.com

https://www.stud.uni-karlsruhe.de/~uhbro/

Tutorium 09: Mittwochs 8:00 Uhr - Raum -107
Tutorium 10: Mittwochs 9:45 Uhr - Raum -107

Poll "Tut Nr. 13 - Informatik 3 Tutorium 9 & 10 Münch"

http://www.doodle.com/4m43bgm5sxrtb85v

	Übungblatt 13 besprechen	Kapitel Informationstheorie abschließen	Probeklausur der Tutoren selbständig bearbeiten	Was zum Thema Informationstheorie wiederholen	Was zum Thema Komplexität wiederholen	Was zum Thema Entscheid- und Aufzählbarkeit wiederholen	Was zum Thema Chomsky Typ 0&1 wiederholen	Was zum Thema Chomsky Typ 2 wiederholen	Was zum Thema Chomsky Typ 3 wiederholen	Ich komme so oder so nicht in das Tutorium
timo	OK		OK	(OK)	(OK)	OK	(OK)	(OK)	(OK)	
Manu	OK		OK	(OK)	OK	OK	(OK)	(OK)	(OK)	
Ben			(OK)	(OK)		OK	(OK)			(OK)
alex	OK	(OK)	(OK)		OK	OK				
Linh	OK	(OK)	OK		OK	(OK)	(OK)	(OK)	(OK)	(OK)
Can		(OK)			OK	OK				(OK)
Rane	OK	(OK)		(OK)	OK	OK				
Daniel Roberts		(OK)	OK	(OK)	(OK)	(OK)	(OK)	(OK)	(OK)	
MÖP	OK	OK	(OK)							
kat	OK	OK	OK	(OK)	(OK)	(OK)				
Count	7:0:3	2:5:3	5:3:2	0:6:4	5:3:2	6:3:1	0:5:5	0:4:6	0:4:6	0:3:7

Was wollen wir heute erreichen?

Was wollen wir heute erreichen?

- Übungsblatt 13 besprechen.

Was wollen wir heute erreichen?

- Übungsblatt 13 besprechen.
- Klausurwiederholung

Aufgabe 1

Gegeben ist eine gedächtnislose Quelle $\mathcal{Q}$, die die Zeichen A, B, C, D, E, F, G mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit ausgibt:

A	B	C	D	E	F	G
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$

Gedächtnislos bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit für die Ausgabe eines Zeichens unabhängig von den vorher ausgegebenen Zeichen ist.

1) Geben Sie die Information pro Zeichen und die Entropie der Quelle $\mathcal{Q}$ an.

Aufgabe 1

Gegeben ist eine gedächtnislose Quelle $\mathcal{Q}$, die die Zeichen A, B, C, D, E, F, G mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit ausgibt:

A	B	C	D	E	F	G
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$

Gedächtnislos bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit für die Ausgabe eines Zeichens unabhängig von den vorher ausgegebenen Zeichen ist.
1) Geben Sie die Information pro Zeichen und die Entropie der Quelle $\mathcal{Q}$ an.
2) Geben Sie eine optimale Kodierung der Zeichen mit einem Huffman-Codes an.

Aufgabe 1

3) Betrachten Sie die ursprüngliche Quelle mit der Kodierung aus dem vorherigen Aufgabenteil als neue Quelle $\mathcal{Q}'$, die die Zeichen 0 und 1 ausgibt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Quelle als nächstes Zeichen 0 bzw. 1 ausgibt (wenn keine Information über das vorhergehende Zeichen vorliegt) und geben Sie die Information der beiden Zeichen an sowie die Entropie der Quelle $\mathcal{Q}'$.

Aufgabe 1

Sei $p(Z)$ die Wahrscheinlichkeit, mit der das Zeichen Z von der Quelle $\mathcal{Q}$ ausgegeben wird. Dann ist

$$I(Z) := I(p(Z)) = -\log p(Z) \tag{1}$$

die Information des Zeichens Z. Die Entropie der Quelle $\mathcal{Q}$ ausgegeben wird, ist dann

$$H(\mathcal{Q}) = \sum_{Z\in\mathcal{Q}} p(Z)I(p(Z)) = -\sum_{Z\in\mathcal{Q}} p(Z)\log p(Z). \tag{2}$$

Aufgabe 1

1) Für die Information der Zeichen, die von der Quelle ausgegeben werden, gilt:

Z	A	B	C	D	E	F	G
$I(Z)$	3 Bit	4 Bit	2,415 Bit	2 Bit	3 Bit	4 Bit	2,415 Bit

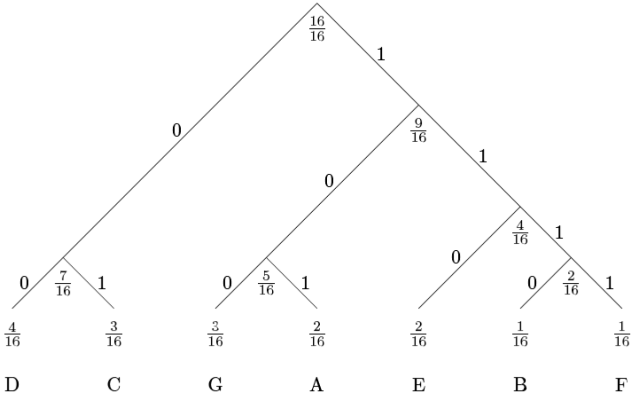
Die Entropie der Quelle ist damit $H(\mathcal{Q}) = 2,656 Bit$.

Aufgabe 1

2) Eine optimale Kodierung mit einem Huffman-Code ergibt zum Beispiel:

A	101
B	1110
C	01
D	00
E	110
F	1111
G	100

Aufgabe 1


16/16
0
1
9/16
0
1
4/16
0
1
7/16
0
1
5/16
0
1
2/16
0
1
4/16
3/16
3/16
2/16
2/16
1/16
1/16
D
C
G
A
E
B
F

Aufgabe 1

3) Betrachtet man die kodierte Quelle $\mathcal{Q}'$, ergeben sich mit obiger Kodierung die Wahrscheinlichkeiten für die Zeichen 0 und 1, so ergeben sich folgende relativen Häufigkeiten:

0	$\frac{22}{43}$
1	$\frac{21}{43}$

Die Rechnung dazu ist wie folgt: Von 16 Zeichen der Quelle $\mathcal{Q}$ sind 2 A, 1 B,. . .

Die kodierte Quelle $\mathcal{Q}'$ macht daraus 43 Zeichen, davon sind 22 0 und 21 1.

Die Information der Zeichen von $\mathcal{Q}'$ ist

Z	0	1
$I(Z)$	0,9668 Bit	1,0339 Bit

und die Entropie ist damit $H(\mathcal{Q}') = 0,9996 Bit$.

Die erwarte Codelänge für $\mathcal{Q}$ ist übrigens $2,6875$ und liegt damit nur knapp über der Entropie der Quelle.

Aufgabe 2

Gegeben sei eine gedächtnislose Quelle Q, die mit Wahrscheinlichkeit $p_0 = \frac{1}{4}$ eine 0 und mit Wahrscheinlichkeit $p_1 = \frac{3}{4}$ eine 1 sendet.
Gegeben sei außerdem ein Empfänger R, der die Zeichen von Q versucht zu empfangen. Dieser Empfänger empfängt eine 0 immer richtig. Sendet die Quelle Q jedoch eine 1, so empfängt R mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ eine 1 und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ eine 0.

1. Berechnen Sie die Information $I(0)$ und $I(1)$ bzgl. Q.

Aufgabe 2

Gegeben sei eine gedächtnislose Quelle Q, die mit Wahrscheinlichkeit $p_0 = \frac{1}{4}$ eine 0 und mit Wahrscheinlichkeit $p_1 = \frac{3}{4}$ eine 1 sendet.
Gegeben sei außerdem ein Empfänger R, der die Zeichen von Q versucht zu empfangen. Dieser Empfänger empfängt eine 0 immer richtig. Sendet die Quelle Q jedoch eine 1, so empfängt R mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ eine 1 und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ eine 0.

1. Berechnen Sie die Information $I(0)$ und $I(1)$ bzgl. Q.
2. Berechnen Sie die Entropie der Quelle Q.

Aufgabe 2

Gegeben sei eine gedächtnislose Quelle Q, die mit Wahrscheinlichkeit $p_0 = \frac{1}{4}$ eine 0 und mit Wahrscheinlichkeit $p_1 = \frac{3}{4}$ eine 1 sendet.
Gegeben sei außerdem ein Empfänger R, der die Zeichen von Q versucht zu empfangen. Dieser Empfänger empfängt eine 0 immer richtig. Sendet die Quelle Q jedoch eine 1, so empfängt R mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ eine 1 und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ eine 0.

1. Berechnen Sie die Information $I(0)$ und $I(1)$ bzgl. Q.
2. Berechnen Sie die Entropie der Quelle Q.
3. Die Quelle Q sendet die Zeichenfolge 0110. Wie hoch ist die Entropie dieser Zeichenfolge?

Aufgabe 2

Gegeben sei eine gedächtnislose Quelle Q, die mit Wahrscheinlichkeit $p_0 = \frac{1}{4}$ eine 0 und mit Wahrscheinlichkeit $p_1 = \frac{3}{4}$ eine 1 sendet.
Gegeben sei außerdem ein Empfänger R, der die Zeichen von Q versucht zu empfangen. Dieser Empfänger empfängt eine 0 immer richtig. Sendet die Quelle Q jedoch eine 1, so empfängt R mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ eine 1 und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ eine 0.

1. Berechnen Sie die Information $I(0)$ und $I(1)$ bzgl. Q.
2. Berechnen Sie die Entropie der Quelle Q.
3. Die Quelle Q sendet die Zeichenfolge 0110. Wie hoch ist die Entropie dieser Zeichenfolge?
4. Berechnen Sie die Transinformation $I(Q; R)$, die Fehlinformation $H(R|Q)$, die Äquivokation $H(Q|R)$ und die Totalinformation $H(Q, R)$.

Aufgabe 2

1) Information des Zeichens 0: $I(0) = I(p_0) = -\log\frac{1}{4} = 2$ bit
Information des Zeichens 1: $I(1) = I(p_1) = -\log\frac{3}{4} = 0,42$ bit
Bemerkung: *Man sieht hier, dass das unwahrscheinlichere Zeichen, nämlich die 0, den höheren Informationswert hat, also mehr "überrascht".*

Aufgabe 2

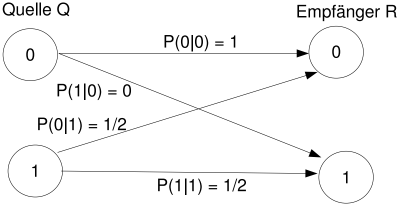
2) Entropie der Quelle Q:
$H(Q) = -p_0 \log p_0 - p_1 \log p_1 = -\frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \log \frac{3}{4} = 0,81$ bit.
Bemerkung: *Dass die erwartete Überrschung, also die Entropie der Quelle, nicht* 1 *bit pro Zeichen ist, sondern nur* $0,81$ *bit, liegt daran, dass die Zeichen* 0 *und* 1 *nicht gleichverteilt gesendet werden. Maximale Entropie gibt's immer bei Gleichverteilung.*

Aufgabe 2

3) Information der Zeichenfolge 0110:
$I(0110) = 2 * I(p_0) + 2 * I(p_1) = 4,82$ bit
Bemerkung: *In der Aufgabe steht fälschlicherweise "Entropie" des Wortes statt "Information", das wurde in der Vorlesung meines Wissens nicht behandelt, gibt also keinen Abzug, wenn man die Aufgabe nicht hat.*

Aufgabe 2

4) Wir fassen die gegebenen Wahrscheinlichkeiten in folgendem Bild zusammen:



Benötigte Wahrscheinlichkeiten:

$p(0,0) = \frac{1}{4}$
$p(0,1) = 0$
$p(1,0) = \frac{3}{8}$
$p(1,1) = \frac{3}{8}$

Aufgabe 2

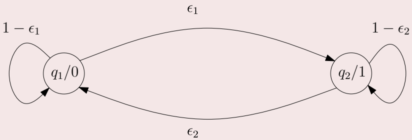
Totalinformation:
$H(Q,R) = \sum_{x \in Q} \sum_{y \in R} p(x,y) \log \frac{1}{p(x,y)} = 1,57$ bit
Fehlinformation: $H(R|Q) = \sum_{(x,y) \in (Q,R)} p(x,y) \log \frac{1}{p(y|x)} = \frac{3}{4}$ bit
Äquivokation: $H(Q|R)$: Dazu berechnen wir die Entropie des Empfängers R: die Wahrscheinlichkeit, dass R eine 0 empfängt, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass Q eine 0 sendet (diese wird ja immer richtig übertragen) $+ \frac{1}{2}$ mal der Wahrscheinlichkeit, dass Q eine 1 sendet (diese wird ja mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ falsch übertragen, so dass sie als 0 ankommt). Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 1 bei R ankommt, $\frac{1}{2}$ mal der Wahrscheinlichkeit, dass Q eine 1 sendet.

Aufgabe 2

D.h. $p(0) = p_0 + p_1 * p(0|1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} * \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$
$p(1) = p_1 * p(1|1) = \frac{3}{4} * \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$
Damit können wir nun die Entropie von R ausrechnen:
$H(R) = H(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}) = -\frac{5}{8}\log\frac{5}{8} - \frac{3}{8}\log\frac{3}{8} = 0,96$ bit. Nun zur Äquivokation:
$H(Q|R) = H(Q,R) - H(Y) = (1,57 - 0,96)$ bit $= 0,61$ bit.
Transinformation: $I(Q;R) = H(Q) - H(Q|R) = (0,81 - 0,61)$ bit $= 0,20$ bit. Alternative Rechnung:
$I(Q;R) = H(R) - H(R|Q) = 0,96 - 0,75$ bit $= 0,21$ bit (Die $0,01$ Unterschied sind ok, liegt an Rundungsungenauigkeiten).

Aufgabe 3

Gegeben sei folgende Quelle Q, die einem Markow-Prozess gehorcht, also nicht zustandslos ist. Q habe das Ausgabealphabet $\{0, 1\}$.



Aufgabe 3

1. Sei $\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2$. Berechnen sie die Wahrscheinlichkeit dass bei einer Meßreihe der Länge $n+1$ n mal hintereinander das selbe Zeichen gemessen wird und danach ein anderes, also ein „Run“ der Länge n auftritt. (2P)

Aufgabe 3

1. Sei $\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2$. Berechnen sie die Wahrscheinlichkeit dass bei einer Meßreihe der Länge $n+1$ n mal hintereinander das selbe Zeichen gemessen wird und danach ein anderes, also ein „Run“ der Länge n auftritt. (2P)
2. Was ist die erwartete Länge eines Runs? (2P)

Aufgabe 3

1. Sei $\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2$. Berechnen sie die Wahrscheinlichkeit dass bei einer Meßreihe der Länge $n+1$ n mal hintereinander das selbe Zeichen gemessen wird und danach ein anderes, also ein „Run“ der Länge n auftritt. (2P)
2. Was ist die erwartete Länge eines Runs? (2P)
3. Sei $\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{1}{5}$. Lohnt es sich die Ausgaben von Q mit einer Run-Length Codierung zu codieren (Codiertes Wort im Mittel kürzer als ursprüngliches Wort)? Die Runlengthcodierung einer Ausgabe $000000000111100111111011111110$ wäre dabei $(9,0),(4,1),(2,0),(6,1),(1,0),(6,1),(1,0)$ Nehmen sie dabei an dass sie zur Codierung eines Runs der Länge n $2\log_2(n)+1$ bits benötigen. (2P)

Aufgabe 3

4. Der Prozess starte im Zustand q_1, Sei $\epsilon_1 = \frac{1}{3}$ und $\epsilon_2 = \frac{1}{2}$. Angenommen wir wüßten nicht dass die Quelle Q einem Markow-Prozess gehorcht, sondern würden stattdessen annehmen Q sei zustandslos und damit einem Bernoulli-Prozess gehorchend. Welche Entropie würden wir bei sehr langer Beobachtung von Q messen? Tipp: Es gilt

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

(2P)

Aufgabe 3

1) Es sein R eine Zufallsvariable die die Länge eines Runs beschreibt. Die Wahrscheinlichkeit dass ein Run der Länge n auftritt ist für $n > 0$

$$P(R = n) = (1 - \epsilon)^{n-1}\epsilon$$

da das letzte Zeichen verschieden von den vorherigen sein muss. Runs der Länge 0 gibt es nicht. Dies ist tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, denn $P(R = n) > 0$ und

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(R = i) = \sum_{i=1}^{\infty} (1 - \epsilon)^{i-1}\epsilon = \epsilon \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \epsilon)^{i} = \epsilon \cdot \frac{1}{\epsilon} = 1$$

R ist also diskret exponentialverteilt.

Aufgabe 3

2) Wir berechnen den Erwartungswert von R

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(R) &= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot P(R=i) = \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)(1-\epsilon)^i\epsilon \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot (1-\epsilon)^i\epsilon + \sum_{i=0}^{\infty} \cdot (1-\epsilon)^i\epsilon = \epsilon\frac{1-\epsilon}{\epsilon^2} + 1 = \frac{1}{\epsilon}\end{aligned}$$

Aufgabe 3

3) In einem Run der Länge n benötigen wir $\frac{2\log(n)+1}{n}$ Bits um ein einzelnes Zeichen zu kodieren. Gehen wir davon aus dass ein Run im Mittel 5 Zeichen lang ist, so benötigen wir für einen mittleren Run $\frac{2\cdot\log(5)+1}{5} \geq 1$ Bits um ein einzelnes Zeichen im Run zu kodieren. Somit lohnt sich die Runlengthcodierung nicht.

Aufgabe 3

4) Befinden wir uns anfangs im Zustand q_1, so ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den Zuständen

$$s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Zustandsübergangsmatrix ist

$$P = \begin{pmatrix} P(q_1|q_1) & P(q_1|q_2) \\ P(q_2|q_1) & P(q_2|q_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Also haben wir nach n Zustandsübergängen eine Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$s' = P^n s$$

auf den Zuständen.

Wir betrachten nun den Grenzwert von P^n für $n \to \infty$. Es ist

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P^n &= \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{4}{10} & \frac{4}{10} \\ \frac{6}{10} & \frac{6}{10} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Es ist also für große n (also nach langem Beobachten)

$$s' = \begin{pmatrix} \frac{4}{10} \\ \frac{6}{10} \end{pmatrix}$$

Und damit

$$\begin{aligned} H &= -\frac{4}{10} \cdot \log(\frac{4}{10}) - \frac{6}{10} \cdot \log(\frac{6}{10}) \\ &\approx 0{,}971 \end{aligned}$$

Aufgabe

1. Gegeben sei das Datenwort 1101. Geben Sie das Datenwort mit Prüfbits anhand des Quersummenbits- (gerade Parität) und Hamming-Code-Verfahrens an.

Aufgabe

1. Gegeben sei das Datenwort 1101. Geben Sie das Datenwort mit Prüfbits anhand des Quersummenbits- (gerade Parität) und Hamming-Code-Verfahrens an.
2. Gegeben sind die folgenden Hamming-Codierten Datenwörter. Prüfen Sie, ob diese fehlerfrei sind oder nicht. Falls ein Fehler vorhanden ist, korrigieren Sie diesen.
   i) 1100010
   ii) 1101110

Aufgabe

1. Gegeben sei das Datenwort 1101. Geben Sie das Datenwort mit Prüfbits anhand des Quersummenbits- (gerade Parität) und Hamming-Code-Verfahrens an.
2. Gegeben sind die folgenden Hamming-Codierten Datenwörter. Prüfen Sie, ob diese fehlerfrei sind oder nicht. Falls ein Fehler vorhanden ist, korrigieren Sie diesen.
   i) 1100010
   ii) 1101110
3. Was ermöglichen die beiden Codes bezüglich der Fehlererkennung und Fehlerkorrektur?

1)
`Quersummenbits-Verfahren:` Jedem Datenwort, z.B. 4-Bit-Wort $x_1, ...x_4$, wird ein fünftes Bit x_0, das Prüfbit, angehängt, das sich durch Addition mod 2 oder Antivalenzberechnung zu:

$$x_0 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$$

berechnet. Damit wird jedes Datenwort auf gerade Parität (Quersumme) ergänzt. Somit ist $x_0 = 1$ und das Datenwort mit Paritätsbit 11011.

`Hammingcode- Verfahren:` Der Ansatz des Verfahrens orientiert sich an den Dualzahlen und verwendet k verschiedenen Prüfgleichungen für die Quersummen $QS_0, ..., QS_{k-1}$, wobei die i-te Quersumme (QS_i) alle Positionen im Codewort auf gerade ergänzt, die die Potenz 2^i in ihrer Ziffernwertigkeit enthalten $(i = 0, ..., k-1)$:
$k_1 = QS_0$ über alle ungerade Stellen 3,5,7, usw.,
$k_2 = QS_1$ über die Stellen 3,6,7,10,11 usw.,
$k_3 = QS_2$ über die Stellen 5,6,7,12,13,14,15 usw.,
$k_4 = QS_3$ über die Stellen 9,10,11,12,13,14,15 usw.
Es werden gerade Quersummen verwendet und die Datenwörter zum Einfügen der Prüfbits gespreizt, indem die Codewortposition 2^i für die i-te Quersummenprüfstelle k_{i+1} freigehalten wird. Damit erhält man folgendes Schema:

17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	Position
	4								3				2		1	0	i
m_{12}	k_5	m_{11}	m_{10}	m_9	m_8	m_7	m_6	m_5	k_4	m_4	m_3	m_2	k_3	m_1	k_2	k_1	Stellen

$$k_1 = QS_0 = m_1 \oplus m_2 \oplus m_4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0 \ ,$$
$$k_2 = QS_1 = m_1 \oplus m_3 \oplus m_4 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1 \ ,$$
$$k_3 = QS_2 = m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0.$$

Somit das Datenwort mit den Prüfbits: 1100110

2) Ob oder an welcher Position ein Fehler aufgetreten ist, kann durch das erneute Bilden der Quersummen ermittelt werden. Damit die obige Gleichungen für den fehlerfreien Fall gilt, können wir sie umformulieren: z.B. für i) gilt:

$0 = k_1 \oplus m_1 \oplus m_2 \oplus m_4 \Rightarrow 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1,$
$0 = k_2 \oplus m_1 \oplus m_3 \oplus m_4 \Rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1,$
$0 = k_3 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 \Rightarrow 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0,$

Es liegt sicher einen Fehler vor (dies ist aus der Teilaufgabe a) ersichtlich). Die Ergebnisse (rückwärtgeschrieben), also 011 (Dualzahl), gibt die Position, an der ein Fehler aufgetreten ist. Somit ist an der Stelle 3 ein Bit Fehler erkannt und kann korrigiert werden. Genauso gibt es in der Datenwort ii) ein Bit Fehler

$0 = k_1 \oplus m_1 \oplus m_2 \oplus m_4 \Rightarrow 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0,$
$0 = k_2 \oplus m_1 \oplus m_3 \oplus m_4 \Rightarrow 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0,$
$0 = k_3 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 \Rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1,$

100 in Dezimal ist 4. Also an der Position 4 ist das Prüfbit k_3 fehlerhaft.

3) Mit dem Quersummebits-Verfahren können ungerade Anzahl des Bitfehlers erkannt werden, aber korrigieren lassen sich nicht. Mit dem Hammingcode ist es möglich, 1-Bit-Fehler zu erkennen und korrigieren. Wie man leicht überlegen kann, lässt sich an diese Hammingcode ein weiteres Quersummenbit anfügen, sodass auch Zweibitfehler im Codewort erkennbar werden.

http://www.logn.de/tut/ss07/mat/tut_2007-07-09.pdf

Aufgabe

Sei $L_1, L_2, ..., L_k$ eine Gruppe von Sprachen über dem Alphabet Σ, sodass Folgendes gilt:

1. Für alle $i \neq j$ ist $L_i \cap L_j = \emptyset$, d.h. keine der Zeichenreihen ist in zweien der Sprachen enthalten.
2. $L_1 \cup L_2 \cup ... \cup L_k = \Sigma^*$, d.h. jede Zeichenreihe ist in einer der Sprachen enthalten.
3. Jeder der Sprachen L_i für $i + 1, 2, ..., k$ ist rekursiv aufzählbar.

Beweise, dass jede der Sprachen daher rekursiv ist.

Aufgabe

Zeige dass folgendes Problem nicht rek. aufzählbar ist:
Die Menge aller TM-Codes für TMs, die bei jeder Eingabe anhalten.

Vorschau

Vorschau

- Viel Erfolg bei der Informatik 3 Hauptklausur!

Tutorium Ende